

Exercice

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à $2,5 \mu\text{g/mL}$.

Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3te^{-\frac{1}{4}t} + 2 \text{ avec } t \geq 0,$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en $\mu\text{g/mL}$) dans le sang en fonction du temps t (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

1.
 - a. Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$?
 - b. Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.
 - c. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$.
Vérifier que pour tout nombre réel t positif,

$$f'(t) = \frac{3}{4}(4 - t)e^{-\frac{1}{4}t}.$$

3.
 - a. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f (en incluant la limite en $+\infty$).
 - b. À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal?
Quel est alors ce taux? On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4.
 - a. Démontrer qu'il existe une unique valeur t_0 appartenant à $[0; 4]$ telle que $f(t_0) = 2,5$.
En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

On admet qu'il existe une unique valeur t_1 appartenant à $[4; +\infty[$ vérifiant $f(t_1) = 2,5$.

On donne une valeur approchée de t_1 à 10^{-3} près : $t_1 \approx 18,930$.

- b. Déterminer pendant combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à $2,5 \mu\text{g/mL}$ dans le sang.